ZUM RANDWERTPROBLEM DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG DER MINIMALFLÄCHEN

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN
FAKULTÄT DER FRIEDRICH-WILHELMS-
UNIVERSITÄT ZU BERLIN

ACAD.
LUGD.BAT
BIBL.

VON

CHAIM MÜNTZ
AUS LODZ

TAG DER PROMOTION: 1. OKTOBER 1910

BERLIN
DRUCK VON GEORG REIMER
1910

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548904_0090

ZUM RANDWERTPROBLEM DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG DER MINIMALFLÄCHEN

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN
FAKULTÄT DER FRIEDRICH-WILHELMS-
UNIVERSITÄT ZU BERLIN

VON

CHAIM MÜNTZ
AUS LODZ

TAG DER PROMOTION: 1. OKTOBER 1910

BERLIN
DRUCK VON GEORG REIMER
1910

REFERENTEN: PROF. DR. H. A. SCHWARZ
PROF. DR. F. SCHOTTKY.

MEINEN ELTERN

Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **K. Hensel.**
Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.

(Sonderabdruck aus Heft 1 Bd. 139.)

Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen.

Von Herrn *Ch. Müntz* in Charlottenburg.

Einleitung.

Die Aufgabe, durch eine vorgeschriebene geschlossene Raumkurve die Fläche vom kleinsten Inhalt zu legen, ist in präzis mathematischer Form zuerst im Jahre 1760 von *Lagrange* gestellt worden.

In einer für die Entwickelung der Variationsrechnung grundlegenden Abhandlung*) gibt *Lagrange* die Gestalt der partiellen Differentialgleichung der in Betracht kommenden Minimalflächen an und fügt hinzu: „... la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être choisi à volonté".

Seitdem ist durch eine Reihe von bedeutsamen Arbeiten der allgemeine Charakter der Minimalflächen eingehend untersucht worden; weniger dagegen die erwähnte Randwertaufgabe — häufig als Problem von *Plateau* bezeichnet —, welche längere Zeit hindurch zu den schwierigsten der mathematischen Analysis gezählt worden ist**).

In seiner „Théorie mathématique de la chaleur" (Paris 1835) gibt *Poisson* eine allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und erwähnt***) die Möglichkeit der Ausdehnung seiner Methoden auf den Fall der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung

*) „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies". (Oeuvres, T. I.)

**) Vgl. *Darboux*: „Théorie générale des surfaces", T. I, p. 424.

***) p. 171.

der Minimalflächen; allein er begnügt sich dort mit wenigen Andeutungen, ebenso wie in einer kurzen früheren Mitteilung*).

Im Jahre 1866 gaben gleichzeitig *Riemann* und *Weierstraß* die Lösung für den Fall einer aus geradlinigen Teilen bestehenden Begrenzung, und einige Zeit darauf verallgemeinerte Herr *Schwarz* diese Lösung für den Fall einer gemischten Kette aus solchen geradlinigen Teilen und Symmetrieebenen der Fläche.

Im Jahre 1885 führte Herr *Schwarz* in einer *Weierstraß* zu Ehren veröffentlichten Festschrift**) die Methode der sukzessiven Approximationen in die Analysis ein, die seither insbesondere durch die Arbeiten des Herrn *Picard****) zu einem der wichtigsten Hilfsmittel zur Auflösung beliebiger Gleichungen geworden ist.

Wie die hier folgenden Ausführungen dartun sollen, führt die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen wenigstens für den (*Poisson*schen) Fall nahezu ebener stetig gekrümmter Kurven — diese Worte in einem weiterhin näher präzisierten Sinne verstanden — zur wirklichen Bestimmung der von solchen Kurven begrenzten regulären Minimalflächenstücke. Das Ergebnis dieser Ausführungen läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Es sei eine räumliche geschlossene Kurve unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch die Gleichungen vorgeschrieben:

$$(A) \qquad x^* = x(t); \quad y^* = y(t); \quad z^* = \varepsilon \cdot z(t);$$

es seien hierbei $x(t), y(t), z(t)$ zunächst *analytische* Funktionen ihres Argumentes t; die Kurve $x^* = x(t)$, $y^* = y(t)$ habe keinen mehrfachen Punkt,

*) „Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données". (Dieses Journal, Bd. 8; 1832.)

**) „Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung". (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I.)

***) „Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives". (Journal de Mathématiques, s. IV, t. VI; 1890.)

„Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles". (Ibd., t. IX; 1893.)

„Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé". (Ibd., s. V, t. VI; 1900.)

„Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de *Dirichlet*". (Acta Mathematica, Bd. XXV; 1902.)

Traité d'analyse, t. II, III.

ferner sei beständig

$$\text{(B)} \qquad \left(\frac{dx^*}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy^*}{dt}\right)^2\neq 0;$$

ε sei ein unabhängiger Faktor, über dessen Kleinheit nach Belieben verfügt werden darf; alsdann läßt sich für hinreichend kleine Werte dieses Faktors ε mittels sukzessiver Approximationen die Gleichung der entsprechenden regulären Minimalfläche angeben; das gleiche Resultat bleibt noch bestehen, falls die Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen allein* eindeutig, endlich und stetig bleiben, die Bedingung (B) beständig erfüllt ist und für jede zweite Ableitung — sie möge $\psi(t)$ heißen — die Ungleichheit*) gilt:

$$|\psi(t+\tau)-\psi(t)|\leqq C\cdot|\tau|^\lambda; \qquad \tau\leqq\tau_0, \quad 0<\lambda\leqq 1,$$

worin C, τ_0, λ konstante Größen bedeuten.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Ableitung einiger Sätze aus der Potentialtheorie, namentlich mit der Aufstellung eines Systems von Ungleichheitsbedingungen für gewisse allgemeine Potentiale und ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen; der zweite Teil umfaßt die Konvergenzbeweise für die durch das Verfahren der sukzessiven Approximationen gelieferten unendlichen Reihen, ferner den Konvergenzbeweis für die Entwickelung der Lösung nach steigenden Potenzen des Parameters ε; die gleichen Methoden lassen sich unter entsprechenden, aus dem Texte leicht zu bestimmenden, Bedingungen auch auf die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varepsilon\cdot F\left(x,y,z;\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

übertragen.

Anmerkung. Als ich diese Arbeit der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin vorlegte, wußte ich, daß es Herrn

---

*) Diese Bedingung trat bei der Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen bestimmter Entwickelungen mehrfach auf; so in der Theorie der *Fourier*schen Reihen bei *Lipschitz*: „De explicatione per series trigonometricas“ (Dieses Journal, Bd. 63; 1864), ferner in der Potentialtheorie bei *Hölder*: „Beiträge zur Potentialtheorie“ (Dissertation, Stuttgart 1882) und anderen. Wir stellen uns von vornherein auf den Boden einer solchen Bedingung, um sogleich die nötige Allgemeinheit zu erlangen — vor allem werden dadurch komplizierte Untersuchungen der Differentiierbarkeitsverhältnisse vermieden —, und wollen sie nach dem zuerst angeführten Forscher bezeichnen.

Prof. *Korn* gelungen sei, den in Frage stehenden Existenzbeweis zu führen; die von Herrn *Korn* zu diesem Zwecke benutzten Hilfsmittel waren mir aber nicht bekannt.

Die betreffende Abhandlung ist seitdem publiziert worden*); da jedoch die Methode der Beweisführung in der vorliegenden Arbeit von derjenigen in der genannten Abhandlung verschieden ist, auch einige der hier gegebenen Resultate — z. B. die Möglichkeit der Entwickelung der Lösung nach Potenzen des Parameters — neu zu sein scheinen, so glaube ich den im folgenden gegebenen Ausführungen einigen selbständigen Wert beilegen zu dürfen.

Teil I.

§ 1. *Allgemeine Bemerkungen.*

Es sei T die Fläche eines um den Anfangspunkt eines rechtwinkligen ebenen Koordinatensystems als Mittelpunkt beschriebenen Kreises vom Radius 1. Für alle inneren (d. h. nicht dem Rande angehörenden) Punkte dieser Kreisfläche möge eine eindeutige endliche stetige Funktion $f(x,y)$ gegeben sein und allgemein der folgenden *Lipschitz*schen Bedingung genügen**):

(1.) $$|f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| \leqq C_0\varrho^\lambda;\ 0\leqq\varrho\leqq\varrho_0;\ 0<\lambda\leqq 1,$$

worin C_0, ϱ_0, λ konstante Größen bedeuten.

Es läßt sich leicht dartun, daß infolge dieser letzten Eigenschaft der absolute Betrag der Funktion $f(x,y)$ auch bei der Annäherung an den Rand des Bereiches T immer unterhalb einer festen endlichen Schranke bleiben wird; ferner, daß $f(x,y)$ bei jeder beliebigen Annäherung an einen Randpunkt (x^*,y^*) einem eindeutig bestimmten endlichen Werte zustrebt, — diesen Wert werden wir als $f(x^*,y^*)$ gelten lassen und auf diese Weise die Funktion $f(x,y)$ als für den *ganzen* Bereich T (einschließlich des Randes) gegeben betrachten. Hierdurch wird die der Funktion $f(x,y)$ auferlegte Ungleichheitsbedingung (1.) nicht gestört.

---

*) „Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen.“ (Abhandl. der Kgl. Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl., Berlin 1909.)

**) Vgl. die Fußnote auf S. 7.

Diese Bedingung kann noch so modifiziert werden, daß sie für ein beliebiges ϱ gültig wird. Die größte Differenz zweier Funktionswerte von $f(x,y)$ im ganzen Bereiche T sei mit C_1 bezeichnet; alsdann ist für $\varrho > \varrho_0$ sicherlich

$$|f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)| \leqq C_1 < \frac{C_1}{\varrho_0^\lambda}\varrho^\lambda.$$

Die größere der beiden Zahlen C_0 und $\frac{C_1}{\varrho_0^\lambda}$ möge C heißen; nunmehr ist allgemein:

$$|f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)| \leqq C\varrho^\lambda; \quad 0 \leqq \varrho; \; 0 < \lambda \leqq 1.$$

Im ganzen Bereiche T ist $\varrho \leqq 2$, daher auch

$$\varrho^\lambda < 2\varrho^\mu; \; (0 < \mu < \lambda).$$

Wir können somit immer annehmen, daß in strengem Sinne $\lambda < 1$ ist.

§ 2. *Die Stellung des Problems.*

Die Eigenschaften der in § 1 angegebenen Funktion $f(x,y)$ mögen der Einfachheit halber durch folgende zwei Bedingungen allgemein ausgesprochen werden:

$$(2.) \quad |f(x,y)| < c; \quad |f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)| < c\varrho^\lambda; \quad 0 \leqq \varrho; \; 0 < \lambda < 1,$$

worin c eine Konstante ist.

Wir betrachten nunmehr diejenige eindeutig bestimmte im Innern des Gebietes T reguläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x,y),$$

welche längs des ganzen Randes verschwindet.

Über diese Lösung V sprechen wir die folgenden drei Sätze aus, deren Beweis den weiteren Inhalt dieses ersten Teiles bilden soll:

Satz I. Die Funktion V und ihre sämtlichen partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen sind für das ganze Gebiet T einschließlich des Randes endlich und stetig.

Satz II. Die Funktion V und ihre ersten Ableitungen erfüllen je eine Lipschitzsche Bedingung mit dem Exponenten 1, die zweiten Ableitungen eine solche mit dem Exponenten λ.

Satz III. Es sei

$$(4.) \quad V(x,y) = V; \; V(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) = V^{(1)}(x,y) = V^{(1)};$$
$$V^{(1)} - V = \Phi(x,y) = \Phi$$

genannt. Die Beifügung eines Striches möge irgendeine erste Ableitung kennzeichnen, die Beifügung zweier — eine zweite. Dann läßt sich eine endliche, positive, nur vom Exponenten λ abhängige Zahl m so bestimmen, daß allgemein folgendes System von Ungleichheitsbedingungen gelten wird:

$$(5.) \qquad \begin{aligned} &|V|<mc; \quad |V'|<mc; \quad |V''|<mc; \\ &|\Phi|<2mc\varrho; \quad |\Phi'|<2mc\varrho; \quad |\Phi''|<2mc\varrho^{\lambda}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die angeführten Hilfssätze sind im wesentlichen dieselben, deren sich auch Herr *Korn* in seiner oben erwähnten Abhandlung bedient; die im folgenden gegebenen Beweise scheinen mir indessen den Vorzug größerer Einfachheit zu besitzen, da sie nur die Kenntnis der *Green*schen Funktion des Einheitskreises voraussetzen.

§ 3. *Explizite Darstellung der Funktion V.*

Es möge

$$G(x,y;\ \xi,\eta)=G$$

die *Green*sche Funktion des Einheitskreises bedeuten.

Die Fortlassung jeder Angabe über das Integrationsgebiet in den weiter zu gebenden Formeln möge ein für allemal bedeuten, daß die Integration über den ganzen Bereich T zu erstrecken sei.

Die gesuchte Lösung V und ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen lassen sich mit Hilfe der *Green*schen Funktion explizit darstellen.

Es treten hierbei uneigentliche Doppelintegrale auf, die zum Teil — und zwar insofern sie zur Darstellung der *zweiten* Ableitungen dienen — nicht unbedingt konvergent sind. Solche Integrale sind dann jedesmal in folgendem Sinne zu verstehen: um den jeweiligen kritischen Punkt (x,y) als Mittelpunkt wird zunächst ein Kreis (δ) mit hinreichend kleinem Radius beschrieben, und darauf die Integration über das Gebiet $T-(\delta)$, d. h. den ganzen ursprünglichen Bereich T mit Ausschluß jenes Kreises (δ), ausgedehnt; das betrachtete uneigentliche Doppelintegral wird dann als Grenzwert der so erhaltenen endlichen Integrale definiert. Es ist demnach

$$\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\,d\eta=\lim_{(\delta)=0}\iint_{T-(\delta)} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\,d\eta$$

zu setzen usf.; durch Hinzufügung eines Sternes $*$ an den Integralzeichen

möge im folgenden bei solchen uneigentlichen Doppelintegralen an die obige Definition erinnert werden.

Die einschlägigen Formeln für die explizite Darstellung der Funktion V und ihrer ersten und zweiten partiellen Ableitungen sind in aller Ausführlichkeit in einer Arbeit des Herrn *Dini**) hergeleitet worden; sie gelten für *innere* Punkte des Bereiches T und lauten folgendermaßen:

$$(6.) \qquad V = -\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot G\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial y}\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{*} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{2}f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{*} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{2}f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{*} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot d\xi\, d\eta.$$

Legen wir in diesen Formeln die Funktion

$$f_0(x,y) = 1$$

zugrunde, so ist die Lösung einfach

$$V_0 = \frac{x^2+y^2-1}{4};$$

es gelten daher die Beziehungen:

$$(7.) \qquad \frac{x^2+y^2-1}{4} = -\frac{1}{2\pi}\iint G\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{y}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial G}{\partial y}\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\iint_{*}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\iint_{*}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot d\xi\, d\eta.$$

Es folgt daraus für *jede* zweite Ableitung der *Green*schen Funktion des Einheitskreises die für den weiteren Verlauf dieser Untersuchung fundamentale Identität:

$$(8.) \qquad \iint_{*} G''\cdot d\xi\, d\eta = 0.$$

---

*) „Sur la méthode des approximations successives etc.“ pp. 202, 209. (Acta Mathematica, Bd. XXV; 1902.)

§ 4. *Über die Greensche Funktion.*

Es mögen an dieser Stelle einige Eigenschaften der *Green*schen Funktion G kurz zusammengestellt werden.

Wir bezeichnen mit (x, y) die Lage des Pols der *Green*schen Funktion, mit (ξ, η) die des variablen Aufpunktes, mit (ξ', η') die des Spiegelbildes von (ξ, η) in bezug auf die Kreisperipherie des betrachteten Bereiches T. Es sei ferner r die vom Pol aus genommene Entfernung bis zum Aufpunkt, r' diejenige vom Pol bis zum Spiegelbild des Aufpunktes; θ möge den Winkel zwischen dem Vektor r und der positiven Richtung der X-Achse bezeichnen, θ' den entsprechenden Winkel für den Vektor r'; schließlich möge die Entfernung vom Mittelpunkte bis zum Aufpunkt ω heißen.

Es ist demnach:

$$(9.) \qquad \xi' = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2};$$

$$r = \left|\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right|, \quad r' = \left|\sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2}\right|;$$

$$\cos\theta = \frac{\xi-x}{r}, \quad \cos\theta' = \frac{\xi'-x}{r'};$$

$$\omega = \left|\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right|,$$

und es bleibt beständig

$$(10.) \qquad r' \geqq r; \quad \omega r' \geqq r.$$

Die *Green*sche Funktion des Einheitskreises ist:

$$(11.) \qquad G = \log\frac{\omega r'}{r}.$$

Ferner ist:

$$(12.) \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{r} - \frac{\cos\theta'}{r'}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{r} - \frac{\sin\theta'}{r'};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} = \frac{\sin 2\theta}{r^2} - \frac{\sin 2\theta'}{r'^2},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}.$$

Aus diesen Formeln folgt allgemein:

$$(13.) \qquad G \geqq 0; \quad |G'| \leqq \frac{2}{r}; \quad |G''| \leqq \frac{2}{r^2},$$

woraufhin die Endlichkeit der untersuchten Funktionen im Innern des Bereiches T dargetan werden kann.

§ 5. *Auffindung oberer Schranken für* $|V|$, $|V'|$, $|V''|$.

Es folgt aus den Beziehungen (7.) und (8.):

$$(14.)\quad \left|\frac{1}{2\pi}\iint G\,d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{4};\quad \left|\frac{1}{2\pi}\iint G'\cdot d\xi\,d\eta\right| \geqq \frac{1}{2};\quad \left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} G''\cdot d\xi\,d\eta\right| = 0.$$

Die Voraussetzungen für die gegebene Funktion $f(x,y)$ sind, wie hier erinnert werden mag:

$$(15.)\quad |f(x,y)| < c,\quad |f(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)| < c\varrho^{\lambda};$$
$$0 \leqq \varrho,\quad 0 < \lambda < 1.$$

Es ist nun:

$$(16.)\quad V = -\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot G\cdot d\xi\,d\eta,$$
$$|V| < c\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\iint G\cdot d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{4}c,$$

womit eine obere Schranke für $|V|$ gefunden ist.

Wir dürfen ferner schreiben:

$$(17.)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{f(x,y)}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta - \frac{1}{2\pi}\iint [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta.$$

Das erste der beiden hier auftretenden Integrale*) ist leicht abzuschätzen; es ist:

$$(18.)\quad \left|-\frac{f(x,y)}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| < c\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{2}c.$$

Zur Abschätzung des zweiten betrachteten Integrals ersetzen wir die einzelnen Faktoren durch die Höchstbeträge ihrer absoluten Werte, führen Polarkoordinaten mit dem Pol (x,y) als Mittelpunkt ein und nehmen statt jedes Vektors nach dem Rande den größtmöglichen Vektor 2; wir erhalten dann:

$$(19.)\quad \left|-\frac{1}{2\pi}\iint [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} cr^{\lambda}\cdot\frac{2}{r}\cdot r\,dr < 8c.$$

Die Zusammenfassung der beiden letzten Resultate ergibt eine obere Schranke für $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$, welche aus Gründen der Analogie auch für $\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|$ gültig bleibt; wir haben somit

$$(20.)\quad |V'| < \frac{17}{2}c.$$

Es sei jetzt an die Fundamentalformel (8.) erinnert; wir dürfen schreiben:

*) Diese Abkürzung für „Doppelintegral“ möge gestattet werden.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{2} f(x,y) - \frac{1}{2\pi} \iint_{*} [f(\xi,\eta) - f(x,y)] \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot d\xi\, d\eta,$$

(21.)

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right| < \frac{1}{2} c + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 c r^2 \cdot \frac{2}{r^2} \cdot r\, dr < \frac{1}{2} c + \frac{4}{\lambda} c < \frac{9}{2\lambda} c;$$

die gleiche Schranke gilt für $\left| \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|$ und a fortiori für $\left| \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right|$, es ist also allgemein:

$$|V''| < \frac{9}{2\lambda} c. \tag{22.}$$

§ 6. *Beweis der Hilfssätze I und II für V und V'.*

Es möge neben dem einen Pol (x,y) ein beliebiger zweiter betrachtet werden: $(x + \varrho\cos\alpha,\ y + \varrho\sin\alpha)$. Aus den gefundenen Schranken für die absoluten Beträge der ersten und zweiten Ableitungen der Funktion V folgt ohne weiteres*):

$$\begin{aligned} |V(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) - V(x,y)| &< 17\, c\, \varrho; \\ |V'(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) - V'(x,y)| &< \frac{9}{\lambda} c\, \varrho. \end{aligned} \tag{23.}$$

Diese Ungleichheiten enthalten den auf die Funktionen V und V' bezüglichen Teil des Satzes II (vgl. S. 9); nach den allgemeinen Bemerkungen des § 1 ist nunmehr für diese Funktionen auch das reguläre Verhalten auf dem Rande gesichert, womit der entsprechende Teil des Satzes I bewiesen ist. Schwieriger gestaltet sich die Untersuchung für die zweiten Ableitungen V'', zu der wir jetzt übergehen müssen.

§ 7. *Abschätzung der Differenzen* $G''(x^{(1)},y^{(1)};\ \xi,\eta) - G(x,y;\ \xi,\eta)$.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$x + \varrho\cos\alpha = x^{(1)},\ y + \varrho\sin\alpha = y^{(1)};$$

die Bezeichnungen für den Pol $(x^{(1)},y^{(1)})$ mögen mit dem Index (1) versehen werden und sonst durchweg mit denjenigen für (x,y) übereinstimmen; insbesondere schreiben wir:

$$G(x^{(1)},y^{(1)};\ \xi,\eta) = G^{(1)};\ \left| \sqrt{(x^{(1)}-\xi)^2 + (y^{(1)}-\eta)^2} \right| = r^{(1)} = r_1 \text{ usf.}$$

Wir haben nun:

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x^{(1)}} = \frac{\partial G^{(1)}}{\partial x};\ \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^{(1)2}} = \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} \text{ usf.},$$

und können daher schreiben:

$$\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2\theta_1'}{r_1'^2}, \tag{24a.}$$

*) ϱ ist im folgenden immer positiv zu nehmen.

$$(24\,b.)\qquad \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\left(\frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\cos 2\theta}{r^2}\right)-\left(\frac{\cos 2\theta'_1}{r_1'^2}-\frac{\cos 2\theta'}{r'^2}\right).$$

Es ist:

$$(25.)\quad \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\cos 2\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2 r_1^2}\{-(r_1-r)(r_1+r)(2\cos^2\theta+2\cos^2\theta_1)$$
$$+(r_1-r)(r_1+r)$$
$$+(r_1\cos\theta_1-r\cos\theta)(2r_1\cos\theta_1+2r\cos\theta)\}.$$

Nun bilden die drei Vektoren r, r_1, ϱ ein Dreieck; es ist daher:

$$|r_1-r|\leqq\varrho;\quad |r_1\cos\theta_1-r\cos\theta|=|\varrho\cos\alpha|\leqq\varrho;$$

daraus folgt:

$$(26.)\quad \left|\frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\cos 2\theta}{r^2}\right|\leqq\frac{1}{r^2 r_1^2}\cdot 7\varrho(r+r_1)=7\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right),$$
$$\left|\frac{\cos 2\theta'_1}{r_1'^2}-\frac{\cos 2\theta'}{r'^2}\right|\leqq\frac{1}{r'^2 r_1'^2}\cdot 7\varrho(r'+r'_1)=7\varrho\cdot\frac{1}{r'r'_1}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right),$$

und zuletzt, da beständig $r'\geqq r$, $r'_1\geqq r'$ bleibt, durch Zusammenfassung dieser Resultate:

$$(27.)\qquad \left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|\leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right).$$

Die so gefundene Schranke gilt ohne weiteres auch für die endlichen Differenzen der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$; zur Feststellung des gleichen Ergebnisses auch für die gemischte zweite Ableitung $\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}$ bedarf es jedoch einer besonderen Untersuchung. Es ist:

$$(28.)\qquad \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right)-\left(\frac{\sin 2\theta'_1}{r_1'^2}-\frac{\sin 2\theta'}{r'^2}\right);$$

wir schreiben:

$$(29.)\quad \frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2 r_1^2}\{-(r_1+r)(r_1-r)(\sin 2\theta_1+\sin 2\theta)$$
$$+2r_1 r\sin(\theta_1-\theta)$$
$$+(r_1\cos\theta_1-r\cos\theta)(2r_1\sin\theta_1+2r\sin\theta)\}.$$

Es ist aber $\left|\frac{1}{2}r_1 r\sin(\theta_1-\theta)\right|$ nichts anderes, als der Inhalt des aus den Strecken r_1, r, ϱ gebildeten Dreiecks; die auf ϱ gefällte Höhe dieses Dreiecks ist nicht größer, als jede der beiden Nebenseiten r_1, r; es ist daher

$$|2r_1 r\cdot\sin(\theta_1-\theta)|\leqq\varrho(r_1+r)$$

und ferner, wie vorhin,

$$|r_1-r|\leqq\varrho;\quad |r_1\cos\theta_1-r\cos\theta|=|\varrho\cos\alpha|\leqq\varrho;$$

so erhalten wir:

$$(30.) \qquad \left|\frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right| \leqq 7\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right),$$

und ganz analog dem früheren Ergebnisse:

$$(31.) \qquad \left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right| \leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right).$$

§ 8. *Abschätzung der Differenzen* $V''(x^{(1)},y^{(1)})-V''(x,y)$.

Es möge

$$V(x^{(1)},y^{(1)})=V^{(1)} \text{ usf.}$$

geschrieben werden. Wir haben*):

$$(32.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta, \\ \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}f(x^{(1)},y^{(1)})-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Die Abschätzung der Differenz der beiden ersten Glieder der rechten Seiten ergibt hier sofort:

$$(33.) \qquad \left|\frac{1}{2}f(x^{(1)},y^{(1)})-\frac{1}{2}f(x,y)\right| < \frac{1}{2}c\varrho^{\lambda}.$$

Wir haben außerdem noch die Differenz der beiden Integrale

$$(34.) \qquad D''=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} f(\xi,\eta)\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\,d\eta$$

zu untersuchen. Infolge der Fundamentalbeziehung (8.) haben wir:

$$(35.) \quad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} f(x,y)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta=0,\ -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*} f(x^{(1)},y^{(1)})\cdot\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta=0.$$

Es darf demnach geschrieben werden:

$$(36.) \quad D''=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{*}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\,d\eta.$$

Wir zerlegen jetzt das Integrationsgebiet T in folgende vier Teile:

1) einen Kreis vom Radius $\frac{\varrho}{2}$ um den Pol (x,y): er heiße (ϱ);
2) einen gleich großen Kreis um den Pol $(x^{(1)},y^{(1)})$: dieser sei (ϱ_1);
3) das Segment, für welches $r \leqq r_1$ ist, unter Ausschluß aller nach (ϱ) fallenden Punkte: es heiße (τ);

*) In welchem Sinne die hier gebrauchten uneigentlichen Integrale zu verstehen sind, ist bereits ausführlich angegeben (vgl. S. 10).

4) das entsprechende Segment mit $r_1 \leqq r$, unter Ausschluß aller Punkte von (ϱ_1): dieses sei (τ_1).

Die Kreise (ϱ) und (ϱ_1) berühren sich; die Gebietsteile (τ), (τ_1) sind durch die gemeinschaftliche Tangente dieser Kreise voneinander getrennt.

Es könnte vorkommen, daß nur Teile der Kreise $(\varrho), (\varrho_1)$ dem Bereiche T angehören: dann mögen diese Teile allein schon $(\varrho), (\varrho_1)$ heißen.

Wir schreiben jetzt die zu untersuchende Formel (36.) in folgender Weise:

$$(37.)\quad D'' = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\tau)+(\varrho)} [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)} [f(\xi,\eta)-f(x^{(1)},y^{(1)})]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)} [f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta .$$

Es möge zunächst das erste Integral der rechten Seite zerlegt und abgeschätzt werden; die Untersuchung des zweiten Integrals verläuft ganz analog und liefert die gleiche Schranke.

Es ist im ganzen Gebietsteile (τ) beständig:

$$\frac{\varrho}{2} \leqq r \leqq r_1, \quad |f(\xi,\eta)-f(x,y)| < cr^\lambda,$$
$$\left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right| \leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{r r_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right) \leqq 28\varrho\cdot\frac{1}{r^3},$$

woraus nach Einführung von Polarkoordinaten um den Pol (x,y) als Mittelpunkt gefolgert werden kann:

$$(38.)\quad \left|-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)} [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta\right|$$
$$< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\varrho}{2}}^{2} cr^\lambda\cdot\frac{28\varrho}{r^3}\cdot r\, dr < \frac{56}{1-\lambda}c\varrho^\lambda .$$

Diese Ungleichheit läßt den Grund dafür erkennen, weshalb es von vornherein zweckmäßig erschien, den Exponenten λ in strengem Sinne kleiner als 1 vorauszusetzen; durch das Auftreten von logarithmischen Ausdrücken an dieser Stelle würde sich der Exponent 1 nicht aufrechterhalten lassen.

Im Gebietsteile (ϱ) ist beständig

$$\left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\right| \leqq \frac{2}{r_1^2} \leqq \frac{2}{r^2}; \quad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right| \leqq \frac{2}{r^2};$$

wir haben daher:

$$(39.)\qquad \left|-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\varrho)}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta\right|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\varrho}{2}} cr^\lambda\cdot\frac{4}{r^2}\cdot r\,dr<\frac{4}{\lambda}c\varrho^\lambda.$$

Der absolute Betrag der Summe der beiden ersten Integrale auf der rechten Seite der Formel (37.) ist also kleiner als

$$(40.)\qquad \left(\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda}\right)\cdot c\varrho^\lambda.$$

Es bleibt noch das letzte Integral der angegebenen Formel abzuschätzen, d. h.

$$-\frac{f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta.$$

Nach Voraussetzung ist

$$(41.)\qquad |f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)|<c\varrho^\lambda;$$

es gilt nun zu zeigen, daß das uneigentliche Doppelintegral

$$(42.)\qquad A=\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta$$

dem absoluten Betrage nach beständig unterhalb einer festen Schranke liegen muß.

Die Gebietsteile $(\tau_1)+(\varrho_1)$ und $(\tau)+(\varrho)$ bilden zusammen den ganzen Bereich T; es ist daher nach der Formel (8.):

$$(43.)\qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)+(\varrho)}\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta,$$

folglich:

$$(44.)\qquad A=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)+(\varrho)}\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta;$$

hier sind keine uneigentlichen Elemente mehr vorhanden, A ist somit auf jeden Fall endlich.

Die bisher gewonnenen Resultate (33.), (38.), (39.), (41.), (44.) ergeben zusammengefaßt:

$$(45.)\qquad \left|\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|<\left\{\frac{1}{2}+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda}+|A|\right\}\cdot c\varrho^\lambda.$$

Wäre aus den Formeln (32.) von vornherein eine Gleichung für A abgeleitet worden, so würde man ebenso erhalten:

$$(46.) \qquad |A| c\varrho^{\lambda} < \left(\frac{1}{2} + \frac{112}{1-\lambda} + \frac{8}{\lambda}\right) c\varrho^{\lambda} + \left| \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|.$$

Da nun A von der besonderen Beschaffenheit der Funktion $f(x, y)$, und somit auch von $V(x, y)$ nicht abhängt, und die letzte Ungleichheit für alle Funktionen der betrachteten Klasse gilt, so können wir daraus die gesuchte obere Schranke für $|A|$ gewinnen. Nehmen wir beispielsweise

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{8} c(x^2 + y^2),$$

so ist

$$\bar{V}(x, y) = \frac{1}{128} c(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1),$$

und ferner:

$$|f(x, y)| < c; \quad |f(x^{(1)}, y^{(1)}) - \bar{f}(x, y)| < \frac{1}{2} c\varrho < c\varrho^{\lambda};$$

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{V}^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} \right| < \frac{1}{2} c\varrho < c\varrho^{\lambda};$$

wir dürfen aus diesem Falle durch Einsetzung der gewonnenen speziellen Werte in die Beziehung (46.) schließen:

$$(47.) \qquad |A| < \frac{3}{2} + \frac{112}{1-\lambda} + \frac{8}{\lambda},$$

woraus nunmehr *allgemein* folgt:

$$(48.) \qquad \left| \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right| < \left(2 + \frac{224}{1-\lambda} + \frac{16}{\lambda}\right) c\varrho^{\lambda}.$$

Die gleiche Schranke gilt für die endlichen Differenzen jeder zweiten partiellen Ableitung von V überhaupt.

Es ist somit allgemein:

$$(49.) \quad |V''(x + \varrho\cos\alpha,\ y + \varrho\sin\alpha) - V''(x, y)| < \left(2 + \frac{224}{1-\lambda} + \frac{16}{\lambda}\right) c\varrho^{\lambda}.$$

§ 9. *Folgerungen. Beweis der Hauptsätze und Verallgemeinerung.*

Die zweiten Ableitungen V'' der untersuchten Lösung V erfüllen, wie zuletzt bewiesen, im Innern des Bereiches T eine *Lipschitz*sche Bedingung mit dem Exponenten λ. Nach den allgemeinen Bemerkungen des § 1 verhalten sie sich daher auch auf dem Rande regulär.

Die beiden ersten Hauptsätze dieses vorbereitenden Teiles sind somit in vollem Umfange bewiesen.

Zum Beweise des dritten und letzten dieser Sätze stellen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen:

$$(50.)\qquad \begin{aligned} &|V|<\frac{1}{4}c; \quad |V'|<\frac{17}{2}c; \quad |V''|<\frac{9}{2\lambda}c;\\ &|\Phi|<17c\varrho; \quad |\Phi'|<\frac{9}{\lambda}c\varrho; \quad |\Phi''|<\Big(2+\frac{224}{1-\lambda}+\frac{16}{\lambda}\Big)c\varrho^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir brauchen nur zu setzen:

$$(51.)\qquad m=1+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda},$$

so ist dann, wie verlangt worden,

$$(52.)\qquad \begin{aligned} &|V|<mc; \quad |V'|<mc; \quad |V''|<mc;\\ &|\Phi|<2mc\varrho; \quad |\Phi'|<2mc\varrho; \quad |\Phi''|<2mc\varrho^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir fügen nunmehr hinzu, daß die angegebenen drei Sätze ohne weiteres vom Einheitskreise auf jedes Gebiet übertragen werden können, für welches die konforme Abbildung auf den Kreis durch die Funktionen

$$X=X(x,y); \quad Y=Y(x,y)$$

vermittelt wird, wenn diese Funktionen nebst ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen sich auch auf dem Rande regulär verhalten, die (den bekannten *Cauchy-Riemann*schen Bedingungen genügenden) ersten Ableitungen nicht alle gleichzeitig verschwinden und die zweiten Ableitungen je eine *Lipschitz*sche Bedingung erfüllen. Insbesondere gilt also das System (52.) als Folge der Voraussetzungen (2.) für alle von *einer* geschlossenen analytischen Kurve begrenzten ebenen Bereiche. Die entsprechende Konstante m wird dann auch von der Begrenzung abhängen, auf alle Fälle aber endlich bleiben.

Bemerkung. Aus der geometrischen Interpretation einiger allgemeiner Sätze der Herren *Dini**) und *Fatou***) geht hervor, daß die verlangten Eigenschaften denjenigen einfach zusammenhängenden ebenen Bereichen zukommen, deren doppelpunktfreie Randkurve durch die Gleichungen

$$x^*=x(t), \quad y^*=y(t)$$

gegeben ist, wenn die Funktionen $x(t), y(t)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen für den ganzen Rand eindeutig, endlich und stetig bleiben, die ersten Ableitungen nirgends gleichzeitig verschwinden und die zweiten Ableitungen je eine *Lipschitz*sche Bedingung erfüllen. Die weiteren Untersuchungen werden daher für solche Bereiche gelten.

---

*) A. a. O.

**) „Séries trigonométriques et séries de Taylor“, vgl. S. 363. (Acta Mathematica, Bd. XXX; 1906.)

Teil II.

§ 1. *Die Stellung des Problems.*

Für jeden Punkt einer geschlossenen doppelpunktfreien analytischen*) Kurve in der xy-Ebene:

$$x^* = x(t), \quad y^* = y(t)$$

sei eine analytische**) Funktion

$$z^* = z(t)$$

vorgeschrieben, die als Funktion der Randstelle (x^*, y^*) eindeutig sein möge; es sei ferner beständig

$$\left(\frac{dx^*}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt}\right)^2 \neq 0.$$

Deuten wir z^* als dritte rechtwinklige Raumkoordinate, so erhalten wir eine geschlossene analytische Raumkurve, deren Projektion auf die xy-Ebene keinen mehrfachen Punkt enthält.

Wir betrachten jetzt ein ganzes System solcher Kurven, welches wir dadurch erhalten, daß der Funktion z^* ein konstanter Faktor ε beigefügt wird; für hinreichend kleine Werte dieses Parameters ε kommt die entsprechende Kurve beliebig nahe an die xy-Ebene heran.

Wir versuchen durch je eine solche Kurve die im Falle ihrer Existenz eindeutig bestimmte reguläre Minimalfläche zu legen, und zwar soll zu diesem Zwecke die Koordinate $\bar{z}$ als reguläre Funktion der Stelle (x, y) innerhalb des von der gegebenen ebenen Projektion der Randkurve begrenzten Gebietes T explizite dargestellt werden; diese Koordinate wird auch eine Funktion von ε sein, wir nennen sie εz.

Die gesuchte Lösung εz muß im Gebiete T der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen genügen. Es ist also

$$(1.) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = 0$$

und auf dem Rande

$$(1^*.) \qquad z = z^*.$$

§ 2. *Einführung der Grundfunktion z_0.*

Es sei z_0 diejenige reguläre Potentialfunktion des Bereiches T, welche auf dem Rande mit z übereinstimmt. Die Randwerte mögen im folgenden allgemein durch Beifügung eines Sternes kenntlich gemacht

*) Über eine Erweiterung vgl. S. 20.

**) Über eine Erweiterung vgl. S. 22.

werden. Es ist demnach

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}=0; \quad z_0^*=z^*.$$

Unter den im Texte angegebenen Voraussetzungen für die Randfunktion z^* — analytische Funktion längs analytischer Begrenzung — ist bekanntlich*) die Lösung z_0 eine für den ganzen Bereich T einschließlich des Randes *analytische* Funktion ihrer Stelle; es läßt sich daher, wenn

$$z_0(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)=z_0^{(1)}; \quad z_0^{(1)}-z_0=\zeta_0(x,y)=\zeta_0$$

gesetzt wird, eine positive Konstante M_0 so finden, daß folgendes System für jede Stelle des Bereiches erfüllt sein wird:

$$\begin{aligned} &|z_0|<M_0; \quad |z_0'|<M_0; \quad |z_0''|<M_0; \\ (3.)\qquad &|\zeta_0|<2M_0\varrho; \quad |\zeta_0'|<2M_0\varrho; \quad |\zeta_0''|<2M_0\varrho^\lambda; \\ &0<\lambda<1. \end{aligned}$$

Bemerkung. Aus den bereits erwähnten Sätzen der Herren *Dini* und *Fatou* kann gefolgert werden, daß dieses System im Falle des Kreises schon dann aufgestellt werden kann, wenn z^* als Funktion des Bogens zweimal differenzierbar ist und die zweite Ableitung einer *Lipschitz*schen Bedingung genügt. Läßt man der Funktion z^*, mit Ausnahme ihres analytischen Charakters, die übrigen im Texte angeführten Eigenschaften, so genügt es, daß z^* als Funktion des Parameters t diese Eigenschaften besitze. Die Übertragung vom Kreise auf die a. a. O.**) charakterisierten Gebiete ergibt sich ohne weiteres.

§ 3. *Die Methoden der Auflösung: Iteration und Superposition.*

Wir lösen jetzt nacheinander für

$$\nu=0,1,2,\ldots(n-1); \quad \lim n=\infty$$

folgendes System von partiellen Differentialgleichungen auf:

$$(4.)\quad \frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial y^2}+\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2}-2\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2}\right]=0;$$

$$z_{\nu+1}^*=z_\nu^*=\cdots=z_1^*=z_0^*=z^*.$$

Zur Abkürzung möge gesetzt werden:

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial y^2}=\Delta z_{\nu+1};$$

$$\left[\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2}-2\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2}\right]=D(z_\nu).$$

*) Vgl. *Picard*: Traité d'analyse, t. II, p. 301.

**) Vgl. S. 20.

Es ist demnach das System zu lösen:

$$\Delta z_{\nu+1} + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0; \quad z^*_{\nu+1} = z^*,$$

was wir auch so schreiben können:

(7.) $$\Delta(z_{\nu+1} - z_0) + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0; \quad (z_{\nu+1} - z_0)^* = 0.$$

Es sei G die *Green*sche Funktion des Bereiches T; dann ist explizite:

(8.) $$z_{\nu+1} - z_0 = \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \iint D(z_\nu) \cdot G \cdot d\xi d\eta.$$

Die Folge der Näherungsfunktionen

$$z_0, z_1, z_2, \ldots z_\nu, z_{\nu+1}, \ldots z_n$$

wird demnach durch einen Iterationsprozeß bestimmt.

Den Systemen (6.), (7.) ist das folgende vollständig äquivalent:

(9.) $$\Delta(z_{\nu+1} - z_\nu) + \varepsilon^2 [D(z_\nu) - D(z_{\nu-1})] = 0; \quad (z_{\nu+1} - z_\nu)^* = 0.$$

Hierin setzen wir

(10.) $$z_{\nu+1} - z_\nu = v_{\nu+1}$$

und folgern daraus

(11.) $$z_{\nu+1} = z_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_\nu + v_{\nu+1}.$$

Es ist explizite:

(12.) $$v_{\nu+1} = \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \iint [D(z_\nu) - D(z_{\nu-1})] \cdot G \cdot d\xi d\eta;$$

hier werden die Näherungsfunktionen durch ein Superpositionsverfahren gebildet.

Die Kombination der beiden angegebenen Prozesse ist der wesentliche Inhalt der Methode der sukzessiven Approximationen.

§ 4. *Die Konvergenzsätze.*

Wir behaupten nunmehr, daß für angebbar kleine Werte des Parameters ε die folgenden drei Sätze gelten:

Satz I. Auch bei beliebigem Wachsen des Index ν bleiben die Näherungsfunktionen $z_{\nu+1}$ mit ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen endlich und stetig.

*Satz II. Die vom Verfahren der sukzessiven Approximationen gelieferten unendlichen Reihen**):

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\ \dot{z} &= z_0' + v_1' + v_2' + \cdots \\ \ddot{z} &= z_0'' + v_1'' + v_2'' + \cdots \end{aligned}\right\} \text{ad inf.}$$

*) Die Striche bedeuten wieder Ableitungen.

konvergieren absolut und in gleichem Grade; es ist

$$\dot{z} = z'; \quad \ddot{z} = z''.$$

Satz III. Die eindeutig bestimmte Funktion z ist die gesuchte Lösung des gestellten Problems.

Diese Lösung selbst, sowie ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen sind für den ganzen gegebenen Bereich einschließlich des Randes eindeutig, endlich und stetig. Alle diese Funktionen lassen sich in ihrem Bereiche nach steigenden Potenzen des Parameters ε entwickeln.

§ 5. *Beweis des ersten Hauptsatzes.*

Zur Untersuchung einer jeden durch die Formel (8.) gegebenen Näherungsfunktion $z_{\nu+1}$ müssen wir sowohl den absoluten Betrag des entsprechenden Differentialausdrucks $D(z_\nu)$ selbst, als auch den seiner endlichen Differenzen abschätzen, worauf die im ersten Teile gefundenen Resultate (52.) über das weitere Aufschluß geben werden. Wir kürzen folgendermaßen ab:

$$\begin{gathered} D(z_\nu) = D_\nu(x,y) = D_\nu; \\ D_\nu(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = D_\nu^{(1)}; \\ z_\nu(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = z_\nu^{(1)}; \\ z_\nu^{(1)} - z_\nu = \zeta_\nu. \end{gathered} \tag{13.}$$

Es ist

$$D(z_\nu) = \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots;$$

die fortgelassenen zwei Glieder der rechten Seite sind in den folgenden Ausführungen genau so abzuschätzen wie das ausgeschriebene erste; das Resultat der Abschätzung dieses ersten Gliedes wird jedesmal zu vervierfachen sein.

Wir nehmen an, es sei bereits das folgende System gefunden:

$$\begin{aligned} &|z_\nu| < M_\nu; \quad |z_\nu'| < M_\nu; \quad |z_\nu''| < M_\nu; \\ &|\zeta_\nu| < 2M_\nu\varrho; \quad |\zeta_\nu'| < 2M_\nu\varrho; \quad |\zeta_\nu''| < 2M_\nu\varrho^\lambda. \end{aligned} \tag{15.}$$

Jedenfalls ist M_0 nach Formel (3.) als bekannt zu betrachten.

Die größte Sehne des betrachteten Bereiches möge, wie beim Einheitskreise, gleich 2 vorausgesetzt werden; es ist dies offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit und bewirkt nur, daß wieder

$$\varrho > 2\varrho^\lambda$$

gesetzt werden darf. Wir haben nun:

$$(16.) \qquad |D_\nu| = \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots\right| < 4 M_\nu^3 < 40 M_\nu^3;$$

ferner

$$(17.) \quad |D_\nu^{(1)} - D_\nu| = \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_\nu}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots\right|$$
$$= \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \zeta_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y} + \cdots\right|$$
$$< 4 \{M_\nu^2 \cdot 2 M_\nu \varrho^\lambda + 2 M_\nu \cdot M_\nu \cdot 2 M_\nu \varrho\} < 40 M_\nu^3 \varrho^\lambda.$$

Die gefundenen Ungleichheitsbeziehungen (16.), (17.) entsprechen den Voraussetzungen (2.) im ersten Teile dieser Arbeit; wir dürfen nunmehr die daraus folgenden Bedingungen (52.) entsprechend anwenden. Wir erhalten für die untersuchte Funktion $z_{\nu+1}$ und ihre endlichen Differenzen $\zeta_{\nu+1}$ das System:

$$(18.) \qquad \begin{aligned} &|z_{\nu+1} - z_0| < m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 \text{ usf.}, \\ &|\zeta_{\nu+1} - \zeta_0| < 2m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 \varrho \text{ usf.} \end{aligned}$$

Schreiben wir jetzt

$$(19.) \qquad M_0 + m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 = M_{\nu+1},$$

so ist infolge des Systems (3.)

$$(20.) \qquad \begin{aligned} &|z_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \quad |z'_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \quad |z''_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \\ &|\zeta_{\nu+1}| < 2 M_{\nu+1} \varrho; \quad |\zeta'_{\nu+1}| < 2 M_{\nu+1} \varrho; \quad |\zeta''_{\nu+1}| < 2 M_{\nu+1} \varrho^\lambda. \end{aligned}$$

Dieses System ist denjenigen für z_ν und z_0 — vgl. die Formeln (15.) und (3.) — vollständig analog. Es fragt sich jetzt nur noch, wann unter Zugrundelegung der Rekursionsformel (19.)

$$\lim_{n=\infty} M_n = M$$

existiert und endlich ist. Um dies zu entscheiden, setzen wir

$$(21.) \qquad M_\nu = k_\nu \cdot M_0; \quad m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_0^2 = \varepsilon' \quad (\varepsilon' > 0);$$

es läßt sich nun zeigen, daß für

$$(22.) \qquad \varepsilon' < \frac{4}{27}$$

beständig

$$(23.) \qquad M_\nu < \frac{3}{2} M_0$$

bleibt. Es ist nämlich nach Einsetzen der Bezeichnungen (21.) in die Rekursionsformel (19.):

$$(24.) \qquad k_0 = 1; \quad k_{\nu+1} = 1 + \varepsilon' k_\nu^3.$$

Nehmen wir zunächst

$$\varepsilon' = \varepsilon'_0 = \frac{4}{27},$$

so ist

$$k_1 = 1 + \frac{4}{27} < \frac{3}{2};$$

$$k_2 = 1 + \frac{4}{27} k_1^3 < \frac{3}{2}; \quad \cdots$$

$$k_\nu < \frac{3}{2};$$

a fortiori ist für jedes kleinere ε'

$$k_\nu < \frac{3}{2}; \quad M_\nu = k_\nu M_0 < \frac{3}{2} M_0.$$

Bei der angegebenen Einschränkung des Parameters ε ist daher

$$|z_{\nu+1}| < \frac{3}{2} M_0 \text{ usf.},$$

(25.)

$$|\zeta_{\nu+1}| < 3 M_0 \varrho \text{ usf.}$$

Der erste Hauptsatz dieses Teiles (vgl. S. 23) ist damit bewiesen.

Im übrigen ergeben die Rekursionsformeln (19.) und (24.) die Auflösung der entsprechenden algebraischen Gleichungen

$$M = M_0 + m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M^3; \quad k = 1 + \varepsilon' k^3$$

mit den Unbekannten M bzw. k, nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen; durch die Möglichkeit einer solchen Auflösung für hinreichend kleine ε bzw. ε' wird auch die Möglichkeit der Lösung des gestellten Problems gewährleistet.

§ 6. *Beweis des zweiten Hauptsatzes.*

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung der durch die Formel (12.) gegebenen Funktionen $v_{\nu+1}$ über.

Zu diesem Zwecke müssen die Ausdrücke

$$D(z_\nu) - D(z_{\nu-1}) = D_\nu - D_{\nu-1}$$

und ihre endlichen Differenzen abgeschätzt werden.

Es ist:

(26.)

$$z_\nu = z_{\nu-1} + v_\nu;$$

$$D_\nu - D_{\nu-1} = \left\{\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z_{\nu-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_{\nu-1}}{\partial x^2}\right\} + \cdots$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right\} + \cdots.$$

Wir führen die Abkürzungen ein:

(27.)

$$v_\nu(x + \varrho \cos\alpha,\ y + \varrho \sin\alpha) = v_\nu^{(1)};$$

$$v_\nu^{(1)} - v_\nu = \varphi_\nu.$$

Nun denken wir uns bereits das folgende System aufgestellt:

$$(28.)\qquad \begin{aligned} &|v_\nu| < \Phi_\nu; \qquad |v'_\nu| < \Phi_\nu; \qquad |v''_\nu| < \Phi_\nu; \\ &|\varphi_\nu| < 2\Phi_\nu \varrho; \quad |\varphi'_\nu| < 2\Phi_\nu \varrho; \quad |\varphi''_\nu| < 2\Phi_\nu \varrho^\lambda. \end{aligned}$$

Jedenfalls darf nach dem früheren, da

$$v_1 = z_1 - z_0$$

ist,

$$(29.)\qquad \Phi_1 = m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_0^3 = \varepsilon' \cdot M_0$$

als bereits bekannt gelten.

Wir machen jetzt von den Systemen (15.), (20.), (28.) Gebrauch und erhalten

$$(30.)\qquad \begin{aligned} |D_\nu - D_{\nu-1}| &< 4\{M_{\nu-1}^2 \Phi_\nu + (M_{\nu-1} + M_\nu) M_\nu \Phi_\nu\} \\ &< 40(M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2). \end{aligned}$$

Die endlichen Differenzen des hier betrachteten Differentialausdruckes können folgendermaßen geschrieben werden:

$$(31.)\qquad (D_\nu - D_{\nu-1})^{(1)} - (D_\nu - D_{\nu-1}) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v_\nu^{(1)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial v_\nu^{(1)}}{\partial y}\right] \\ -\left[\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right] \end{array} \right\} + \cdots.$$

Setzen wir wieder

$$z_\nu^{(1)} = z_\nu + \zeta_\nu \text{ usf.},$$
$$v_\nu^{(1)} = v_\nu + \varphi_\nu \text{ usf.},$$

so erhält die Differenz (31.) die folgende Gestalt:

$$(32.)\qquad (D_\nu - D_{\nu-1})^{(1)} - (D_\nu - D_{\nu-1}) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 v_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta_{\nu-1}}{\partial y} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial v_\nu}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_\nu}{\partial x^2} \\ + \left(\frac{\partial \zeta_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y}\right) \frac{\partial v_\nu}{\partial y} \frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} \end{array} \right\} + \cdots,$$

woraus sich für den absoluten Betrag der betrachteten Differenz die Schranke

$$(33.)\qquad \begin{aligned} &4\{M_{\nu-1}^2 \cdot 2\Phi_\nu \varrho^\lambda + 2M_{\nu-1} \cdot \Phi_\nu \cdot 2M_{\nu-1} \varrho + (M_{\nu-1} + M_\nu) \cdot \Phi_\nu \cdot 2M_\nu \varrho^\lambda \\ &\quad + 2(M_{\nu-1} + M_\nu) \varrho \cdot M_\nu \cdot \Phi_\nu + (M_{\nu-1} + M_\nu) \cdot M_\nu \cdot 2\Phi_\nu \varrho\} \\ &\quad < 40\{M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2\} \Phi_\nu \varrho^\lambda \end{aligned}$$

ergibt.

Infolge der Ungleichheitsbedingungen (30.), (33.) läßt sich jetzt schließen:

(34.) $$|v_{\nu+1}| < m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 \{M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2\} \Phi_\nu \text{ usf.}$$

Schreiben wir nun

(35.) $$m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 (M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2) \Phi_\nu = \Phi_{\nu+1},$$

so ist

(36.) $$|v_{\nu+1}| < \Phi_{\nu+1} \text{ usf.},$$

so daß aus den Systemen für $v_1, \ldots v_\nu$ — vgl. Formel (28.) — ein ganz analoges für $v_{\nu+1}$ gefunden ist.

Die Rekursionsformel (35.) stimmt im Grunde genommen mit der früher gefundenen (19.) überein, da allgemein

$$\Phi_{\nu+1} = M_{\nu+1} - M_\nu$$

ist. Zur Abschätzung von $\Phi_{\nu+1}$ machen wir von der Beziehung (23.) Gebrauch; die Rekursionsformel ergibt dann

(37.) $$\Phi_{\nu+1} < m \cdot \varepsilon^2 \cdot 270 M_0^2 \cdot \Phi_\nu.$$

Setzen wir nun — vgl. die Formeln (21.), (22.) —

(38). $$m \cdot \varepsilon^2 \cdot 270 M_0^2 = \frac{27}{4} \varepsilon' = \varepsilon'', \quad (0 < \varepsilon'' < 1),$$

so ergibt sich:

$$\Phi_{\nu+1} < \varepsilon''^\nu \Phi_1,$$

worin Φ_1 nach (29.) als endlich und bekannt anzusehen ist. Wir haben nunmehr

$$|v_{\nu+1}| + |v_{\nu+2}| + \cdots < \varepsilon''^\nu \Phi_1 + \varepsilon''^{\nu+1} \Phi_1 + \cdots = \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1;$$

(40.) $$|v'_{\nu+1}| + |v'_{\nu+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1;$$

$$|v''_{\nu+1}| + |v''_{\nu+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1.$$

Dies besagt aber nichts anderes, als daß die drei Reihen

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\ \dot{z} &= z'_0 + v'_1 + v'_2 + \cdots \\ \ddot{z} &= z''_0 + v''_1 + v''_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \text{ad inf.}$$

in dem ganzen Bereiche T absolut und in gleichem Grade konvergieren. Es folgt daraus auch ohne weiteres

$$\dot{z} = z'; \quad \ddot{z} = z''.$$

Der zweite Hauptsatz (S. 23) ist dadurch bewiesen.

§ 7. *Die Grenzfunktion z als Lösung des Problems.*

Wir können jetzt leicht den ersten Teil des dritten, noch unerledigt gebliebenen, Hauptsatzes beweisen. Wir haben allgemein:

(41.) $$\Delta z_{\nu+1} + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0;\ z^*_{\nu+1} = z^*,$$

also auch

(42.) $$\Delta z_\nu + \varepsilon^2 D(z_\nu) = -\Delta(z_{\nu+1} - z_\nu) = -\Delta v_{\nu+1};\ z^*_\nu = z^*.$$

Es folgt aus den Reihen (40.) unmittelbar:

(43.) $$\lim_{n=\infty} \Delta v_{\nu+1} = 0,$$

somit ist

(44.) $$\lim_{n=\infty}[\Delta z_n + \varepsilon^2 D(z_n)] = 0;\ \lim_{n=\infty} z^*_n = z^*.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$z = \lim_{n=\infty} z_n$$

tatsächlich die gesuchte Lösung des gestellten Problems darstellt. Aus dem System (25.) geht ferner, wenn

$$z(x + \varrho\cos\alpha,\ y + \varrho\sin\alpha) = z^{(1)},$$

$$z^{(1)} - z = \zeta;\ \frac{3}{2} M_0 = M$$

geschrieben wird, hervor, daß

(45.) $$\begin{aligned} &|z| < M; \quad |z'| < M; \quad |z''| < M; \\ &|\zeta| < 2M\varrho; \ |\zeta'| < 2M\varrho; \ |\zeta''| < 2M\varrho^\lambda. \end{aligned}$$

ist. In diesen Beziehungen ist der Beweis für die Endlichkeit und Stetigkeit sowohl der Lösung z als auch ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen enthalten; man ersieht daraus auch die Richtigkeit der im dritten Hauptsatze über das allgemeine Verhalten dieser Funktionen aufgestellten Behauptungen.

§ 8. *Die Entwickelung nach Potenzen des Parameters* ε.

Es sei rein formal die Entwickelung angesetzt

(46.) $$z = w_0 + \varepsilon^2 w_1 + \varepsilon^4 w_2 + \cdots;$$

ferner seien ebenso formal die nötigen Differentiationen gliedweise ausgeführt. Daß diese Ansätze gerechtfertigt sind, wird sich aus dem in der Folge gelieferten Nachweis ergeben, daß für hinreichend kleine Werte des Parameters ε alle in Betracht kommenden Reihen absolut und in gleichem Grade konvergieren.

Durch Einsetzen der Entwickelung (46.) in die zu integrierende partielle Differentialgleichung (1.) ergibt sich zunächst

(47.) $$w_0 = z_0;\ w^*_0 = z^*_0 = z^*,$$

worin z_0 die „Grundfunktion“ der bisherigen Untersuchung ist.

Ferner ergibt sich allgemein:

$$(48.) \qquad \Delta w_{p+1} + \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \left\{ \frac{\partial w_\varkappa}{\partial y} \frac{\partial w_\mu}{\partial y} \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} + \cdots \right\} = 0; \quad w^*_{p+1} = 0.$$

Die Abschätzung der Funktionen w_n geschieht in bereits öfters durchgeführter Weise. Wir schreiben

$$w_n(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = w_n^{(1)};\ w_n^{(1)} - w_n = \omega_n,$$

und denken uns bereits je ein System von Ungleichheitsbedingungen für $w_0,\ w_1, w_2, \ldots w_p$ gefunden; es sei

$$(49.) \qquad \begin{array}{lll} |w_n| < W_n; & |w_n'| < W_n; & |w_n''| < W_n; \\ |\omega_n| < 2W_n\varrho; & |\omega_n'| < 2W_n\varrho; & |\omega_n''| < 2W_n\varrho^\lambda. \end{array} \qquad (n=0,1,2,\ldots p)$$

Jedenfalls ist W_0 bereits bekannt; es ist

$$(50.) \qquad W_0 = M_0.$$

Wir haben eine Abschätzung für das zweite Glied der linken Seite in der Formel (48.) und für die endlichen Differenzen dieses Gliedes vorzunehmen. Wir schreiben kurz

$$\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \left\{ \frac{\partial w_\varkappa}{\partial y} \frac{\partial w_\mu}{\partial y} \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} + \cdots \right\} = D_p(x,y) = D_p,$$

$$D_p(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = D_p^{(1)}.$$

Es ist

$$(51.) \qquad |D_p| < 4 \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} W_\varkappa W_\mu W_\nu < 40 \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} W_\varkappa W_\mu W_\nu;$$

$$|D_p^{(1)} - D_p| = \Big| \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \Big\{ \Big(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y} + \frac{\partial \omega_\varkappa}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial w_\mu}{\partial y} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} \Big\} + \cdots \Big|$$

$$= \Big| \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \Big(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial w_\varkappa^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \Big) + \cdots \Big|$$

$$< 4 \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} (W_\varkappa W_\mu \cdot 2W_\nu\varrho^\lambda + W_\varkappa \cdot 2W_\mu\varrho \cdot W_\nu + 2W_\varkappa\varrho \cdot W_\mu \cdot W_\nu)$$

$$< 40 \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} W_\varkappa W_\mu W_\nu \cdot \varrho^\lambda.$$

Es läßt sich daher für w_{p+1} ein den Systemen (49.) analoges aufstellen, worin

$$(52.) \qquad W_{p+1} = 40m \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} W_\varkappa W_\mu W_\nu$$

sein wird; es ist daher auch

$$(53.) \qquad \varepsilon^{2(p+1)} W_{p+1} = m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \varepsilon^{2\varkappa} W_\varkappa \cdot \varepsilon^{2\mu} W_\mu \cdot \varepsilon^{2\nu} W_\nu.$$

Wir setzen wieder

$$m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_0^2 = \varepsilon';$$

ferner sei

(54.) $$\varepsilon^{2n} W_n = \varepsilon'^n \cdot l_n \cdot W_0$$

gesetzt; es ist nun

(55.) $$W_0 = M_0;\ l_0 = 1,\ l_{p+1} = \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} l_\varkappa l_\mu l_\nu .$$

Wir betrachten jetzt die unendliche Reihe

(56.) $$k = l_0 + \varepsilon' l_1 + \varepsilon'^2 l_2 + \cdots;\ l_0 = 1 .$$

Es ist

(57.) $$k^3 = \sum_{\varkappa+\mu+\nu=p} \varepsilon'^p l_\varkappa l_\mu l_\nu = \Sigma \varepsilon'^p l_{p+1} = \frac{k-1}{\varepsilon'};\ k = 1 + \varepsilon' k^3 .$$

Diese letzte algebraische Gleichung, die übrigens im Laufe der Untersuchung schon einmal aufgetreten ist (vgl. S. 26), muß hier mit Hilfe der *Lagrange*schen Formel für die Entwickelung impliziter Funktionen aufgelöst werden; wir erhalten

(58.) $$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon'^n}{n!} \frac{(3n)!}{(2n+1)!}$$

Durch Vergleichung der beiden Formeln (56.), (58.) erhalten wir weiter

(59.) $$l_n = \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} .$$

Die Reihe

(60.) $$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} W_n = W_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'^n l_n = M_0 \cdot k ,$$

also die Reihe der Höchstbeträge der absoluten Werte in der Entwickelung der Lösung z, oder einer beliebigen ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, nach Potenzen des Parameters ε, ist zugleich mit der Reihe (58.) im ganzen Bereiche T in gleichem Grade konvergent, wenn nur

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon'^{n+1} l_{n+1}}{\varepsilon'^n l_n} = \lim_{n=\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{27}{4} \varepsilon' = \varepsilon''$$

ein echter Bruch ist: die daraus fließende Bedingung

$$\varepsilon' < \frac{4}{27}$$

schließt wieder die gleiche Einschränkung des Parameters ε, wie sie uns bereits in den früheren Ausführungen begegnet ist, in sich ein.

Unter dieser Bedingung ist es somit möglich, sowohl die Lösung z als auch jede ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, nach steigenden Potenzen des Parameters ε in Reihen zu entwickeln, welche im ganzen gegebenen Bereiche unbedingt und in gleichem Grade konvergieren.

Damit ist auch die letzte Behauptung des dritten Hauptsatzes (vgl. S. 24) bewiesen.

§ 9. *Verallgemeinerung.*

Die Art, in der die Resultate des ersten Teiles der vorliegenden Arbeit auf die Lösung des Randwertproblems der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen angewandt worden ist, läßt erkennen, daß auch die allgemeinere partielle Differentialgleichung von elliptischem Typus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varepsilon \cdot F\left(x, y, z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

der gleichen Behandlung zugänglich ist. Vorausgesetzt wird hierbei einerseits, daß sowohl für die vorgeschriebenen Randwerte als auch für die Begrenzung die in den Bemerkungen (S. 20, 22) angegebenen Einschränkungen gelten, andererseits, daß die eindeutige Funktion F für jedes ihrer acht (als voneinander unabhängig betrachteten) Argumente je einer *Lipschitz*schen Bedingung genügt und sowohl für die Werte der entsprechenden Grundfunktion z_0 und ihrer partiellen Ableitungen als auch für einen etwas erweiterten Bereich jener Werte wohldefiniert bleibt. Es läßt sich auch dann bei angemessen kleinen Werten des Parameters ε die Lösung z nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen bestimmen und nach steigenden Potenzen von ε entwickeln.

Lebenslauf.

Ich bin am 28. August 1884 zu Lodz in Russ.-Polen geboren und mosaischer Konfession. Die erste Schulbildung habe ich in der Vaterstadt genossen. Mit dem Reifezeugnis der Höheren Gewerbeschule (Oberrealschule) zu Lodz bin ich Michaelis 1902 an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin immatrikuliert worden; seit dieser Zeit habe ich mich mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien gewidmet. Michaelis 1906 wurde meine Matrikel erneuert.

Meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren *Frobenius*, *Knoblauch*, *Landau*, *Schottky*, *Schwarz* spreche ich an dieser Stelle wärmsten Dank aus.

Herrn Professor *Schwarz* insbesondere, dessen wissenschaftliche Einwirkung mein Studium wohlwollend und fördernd geleitete, seien tiefe Ehrfurcht und inniger Dank bezeugt.

Chaim Müntz.